Doctorado en Economía Aplicada con Mención en Estudios Regionales

Examen de calificación: Microeconomía

Departamento de Economia, UCN
Marzo, 2022

Instrucciones:

- Ud. tiene 15 minutos para revisar las preguntas de su examen y realizar preguntas al profesor. Luego de los 15 minutos, el profesor se retirará de la sala.
- Luego de los 15 minutos para revisar las preguntas. Ud. cuenta con 3 hrs (180 minutos) para responder la pregunta.

Pregunta 1. (30%) Un consumidor tiene una función de gasto $e(p_1, p_2, V) = Vp_1p_2/(p_1 + p_2)$. Se pide encontrar la función directa de utilidad $U(x_1, x_2)$ que relaciona el comportamiento de la demanda de esta persona. Considere que V representa la utilidad indirecta en la forma $V(p_1, p_2, y)$, e y representa el ingreso de la persona.

Solución:

$$e(p_1, p_2, U) = \frac{(Up_1p_2)}{(p_1 + p_2)}$$

$$e(p_1, p_2, V(p_1, p_2, y)) = \frac{(V(p_1, p_2, y)p_1 * p_2)}{((p_1 + p_2))} = y$$

$$V(p_1, p_2, y) = \frac{y(p_1 + p_2)}{(p_1 * p_2)}$$

Asumamos que $y = 1$ where $p_1 * x_1 + p_2 * x_2 = 1$

$$V(p_1,p_2,y)=(p_1+p_2)/(p_1*p_2)$$

También

$$U(x_1,x_2)=min_p V(p_1,p_2,1)$$

s.t.

$$p_1*x_1+p_2*x_2=1$$

$$=min_p(p_1+p_2)/(p_*p_2)$$

s.t.

$$p_1x_1+p_2x_2=1$$

$$L=\frac{(p_1+p_2)}{(p_1*p_2)}+(1-p_1x_1-p_2x_2)$$

FOCs

$$\frac{\partial L}{\partial p_1}=\frac{((p_1*p_2)-(p_1+p_2)p_2)}{(p_1*p_2)^2}-x_1=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_2}=\frac{((p_1*p_2)-(p_1+p_2)p_1)}{(p_1*p_2)^2}-x_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=1-p_1x_1-p_2x_2=0$$

Sustituimos (1) y (2)

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{\frac{(p_1p_2-(p_1+p_2)p_2}{(p_1p_2)^2}}{\frac{(p_1p_2-(p_1+p_2)p_1}{(p_1p_2)^2}}$$

$$x_1/x_2=(p_2^2)/(p_1^2)$$

$$\frac{p_2}{p_1}=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$$

Sustituimos en (3)

$$1-p_1x_1-p_2x_2=0$$

$$1=p_1x_1+p_1(x_1/x_2)x_2$$

$$1=p_1(x_1+\sqrt{x_1})$$

Tenemos

$$p_1 = \frac{1}{(x_1 + \sqrt{x_1 x_2})}$$

y

$$p_2 = \frac{1}{(x_2 + \sqrt{x_1 x_2})}$$

$$U(x_1, x_2) = V(p_1, p_2, 1) = ((p_1 + p_2))/(p_1 * p_2)$$

$$U(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 2(x_1 x_2)^{\frac{1}{2}}$$

Pregunta 2. (30%) Considere la siguiente función CES de producción:

$$Y = (\alpha(\beta)^{\psi} + (1-\alpha)((1-\beta)L)^{\psi})^{\frac{1}{\psi}} \tag{1}$$

Donde $0 << 1$, $0 < b < 1$ y < 1.

a) Se pide encontrar la PMK y PML

b) ¿Se puede considerar homogénea? ¿De ser así, de que grado?

c) ¿Cuál es la elasticidad de sustitución entre K/L de la función?

d) ¿Qué pasa con la CES cuando $\psi = 1, \psi = 0, \psi = -\infty$?

e) ¿Qué elasticidades de sustitución entre K y L se obtiene de las funciones anteriores?

Solución: a)

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{1}{\psi}(\alpha(\beta K)^{\psi} + (1-\alpha)((1-\beta)L)^{\psi})^{\frac{1-\psi}{\psi}}(\psi \beta^{\psi} K^{\psi-1})$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{1}{\psi}(\alpha(\beta K)^{\psi} + (1-\alpha)((1-\beta)L)^{\psi})^{\frac{1-\psi}{\psi}}(\psi(1-\alpha)L^{\psi-1}(1-\beta)^{\psi})$$

b)

$$Y = (^{\psi}(L)^{\psi} + (1-\alpha)(1-\beta)^{\psi}(L)^{\psi})^{\frac{1}{\psi}}$$

$$Y = (^{\psi}t^{\psi}(L)^{\psi} + (1-\alpha)(1-\beta)^{\psi}t^{\psi}(L)^{\psi})^{\frac{1}{\psi}}$$

$$Y = (t^{\psi}[\beta^{\psi}(L)^{\psi} + (1-\alpha)(1-\beta)^{\psi}(L)^{\psi}])^{\frac{1}{\psi}}$$

$$Y = t^1(\beta^{\psi}(L)^{\psi} + (1-\alpha)(1-\beta)^{\psi}(L)^{\psi})^{\frac{1}{\psi}}$$

Es homogénea de grado 1.

c)

$$E_{R_{KL}}K/L = -1/(\psi - 1) = \frac{1}{1-\psi}$$

d) Cuando $\psi = 0$, Se transforma en una Cobb-Douglas. Para demostrar esto, debemos trabajar la función en logaritmos y aplicar the L'Hospitalet rule, temenos:

$$Y = AK^a L^{1-a}$$

Donde;

$$A = (1-b)^b b^a$$

Cuando $\psi = 1$, Se transforma en una Lineal

$$Y = bK + (1-)(1-b)L$$

Cuando $\psi = -\infty$, Se transforma en una Leontielf

$$Y = min(\beta K, (1-\beta)L)$$

e)

Con la Leontief, $Y = min(\beta K, (1-\beta)L)$, la elasticidad de sustitución es 0, ya que se requiere un mínimo de K y L para poder producir.

Con la función lineal, su elasticidad de sustitución es indeterminada.

Con la Cobb-Douglas, su elasticidad de sustitución es unitaria.

Pregunta 3. (40%) Considere una economía espacial con dos ciudades las cuales se representan a través de dos individuos representativos indexados por $i = \{A, B\}$. Cada consumidor representativo posee preferencias representadas por una funcion de utilidad identicas del tipo Cobb Douglas $u(x_1^i, x_2^i) = x_1^i x_2^i$. Cada ciudad posee dotaciones iniciales equivalentes a $e_A = (200, 100)$ y $e_B = (100, 200)$.

1. Asuma que estas ciudades podrían transar el bien 1 y 2 a través de trueque directo, es decir, sin la existencia de un mercado formal. En

caso que así fuera, identifique la existencia de asignaciones Pareto eficientes (PEA). Exprese matemáticamente su existencia y grafique el equilibrio espacial.

2. Asuma que existe un mercado para transar ambos bienes. Encuentre la asignación de Equilibrio Walrasiano (WEA). Por simplicidad asuma que $p_1 = p_2 = 1$. Muestre su desarrollo matemático y grafique su análisis.

3. El gobierno central sospecha que el consumo del bien 1 tiene diferentes externalidades negativas para ambas ciudades. Es por eso que decide establecer un impuesto de t sobre las compras de este bien. Ante la presión de la ciudadania, el gobierno indica que solucionará el costo del impuesto a través de una devolución de dicho impuesto en forma de salario. Es decir, ambas ciudades recibirán una cuota global de $T^i = tx_1^i$ en forma de ingreso. El gobierno indica que esta política es eficiente ya que castiga el consumo nocivo, y, a la vez, permite que ambas ciudades tengan más ingresos. Encuentre la asignación de Equilibrio Walrasiano (WEA) después de impuestos (quedará en función de t), y compárela con su resultado en el item 2. Muestre su desarrollo matemático.

4. Luego de la aplicación del impuesto, el gobierno central defiende la eficiencia del mismo indicando "Dado que devolvemos los impuestos a las personas en forma de ingresos, entonces seguimos teniendo una asignación eficiente del mercado". Demuestre si esto es verdad para cualquier valor de t. Muestre su desarrollo matemático y gráfique. Construya una respuesta técnica al argumento del gobierno central.

Solución:

1. **Asuma que estas ciudades podrían transar el bien 1 y 2 a través de trueque directo, es decir, sin la existencia de un mercado formal. En caso que así fuera, identifique la existencia de asignaciones Pareto eficientes (PEA). Exprese matemáticamente su existencia y grafique el equilibrio espacial.**

   En la PEA necesitamos (al menos) que la tasa marginal de sustitución (MRS) coincida, es decir, $MRS_{1,2}^A = MRS_{1,2}^B$, o que

$$\frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{x_2^B}{x_1^B} \tag{2}$$

A partir de esto, podemos usar nuestras dos condiciones de factibilidad,

$$\begin{aligned} x_1^A + x_1^B = 300 \Rightarrow x_1^B = 300 - x_1^A \\ x_2^A + x_2^B = 300 \Rightarrow x_2^B = 300 - x_2^A \end{aligned} \tag{3}$$

y sustituirlas en nuestra ecuación para obtener,

$$\frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{300 - x_2^A}{300 - x_1^A} \tag{4}$$

Simplificando, podemos obtener la curva de contrato,

$$x_1^A = x_2^A \tag{5}$$

Recuerde que cualquier asignación que se encuentre en la curva de contrato y proporcione una utilidad ligeramente mayor que la asignación inicial para cada individuo, es eficiente en el sentido de Pareto (PEA). Esto nos permite definir nuestro conjunto de asignaciones Pareto eficiente tal como se muestra en la Figura 1.

En particular, dado que la utilidad de la asignación inicial de cada individuo i es $x_1^i x_2^i = 20000$, y que $x_1^i = x_2^i$ debe cumplirse en el punto en el cual las curvas de indiferencia cruzan la curva de contrato, entonces los puntos donde se cruzan satisfacen $x_1^i = x_2^i = \sqrt{20000} \simeq 141.42$. Por lo tanto, la PEA es

$$\{(x_1^i, x_2^i) : x_1^i = x_2^i \quad \text{and} \quad x_j^i \geq \sqrt{20000}\} \tag{6}$$

para todo bien $j = \{1, 2\}$ y cada individuo $i = \{A, B\}$.

2. **Asuma que existe un mercado para transar ambos bienes. Encuentre la asignación de Equilibrio Walrasiano (WEA). Por simplicidad asuma que $p_1 = p_2 = 1$. Muestre su desarrollo matemático y grafique su análisis.**

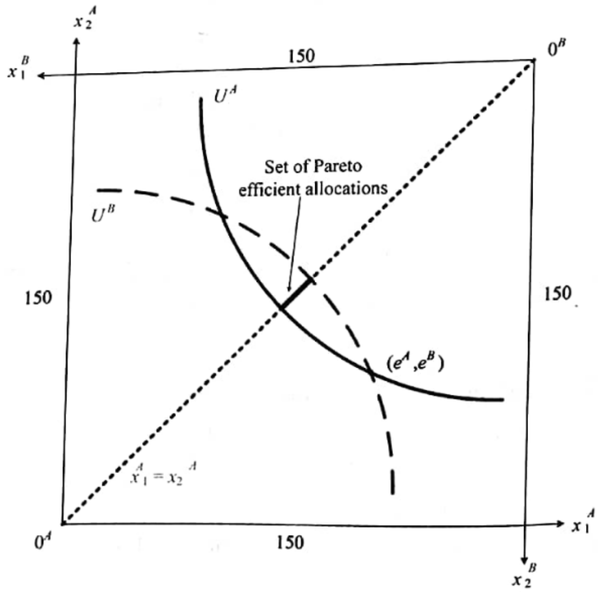

Figure 1: Set de PEAs

- Empecemos con el problema de maximización de utilidad del consumidor A,

$$\begin{aligned} &\max_{x_1^A, x_2^A} x_1^A x_2^A \\ &\text{sujeto a} \quad p_1 x_1^A + p_2 x_2^A = p_1(200) + p_2(100) \end{aligned} \tag{7}$$

con condición de primer orden

$$\begin{aligned} x_2^A - \lambda^A p_1 &= 0, \\ x_1^A - \lambda^A p_2 &= 0, \\ p_1 x_1^A + p_2 x_2^A &= p_1(200) + p_2(100). \end{aligned} \tag{8}$$

Podemos reordenar y dividir la primera condición de primer orden por la segunda, para obtener

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2^A}{x_1^A}, \quad \text{o} \quad 1 = \frac{x_2^A}{x_1^A}, \tag{9}$$

dado que $p_1 = p_2$. Usando la tercera condición de primer orden del consumidor A (la restricción presupuestaria), tenemos

$$x_1^A + x_2^A = 200 + 100, \tag{10}$$

y sustituyendo,

$$2x_1^A = 300 \Rightarrow x_1^{A,*} = 150. \tag{11}$$

De nuestra solución en el item 1,

$$x_2^{A,*} = x_1^{A,*} = 150, \tag{12}$$

- Finalmente, usando las condiciones de factibilidad, podemos obtener las demandas Walrasianas para el consumidor B

$$\begin{aligned} x_1^{B,*} &= 300 - x_1^{A,*} = 150, \\ x_2^{B,*} &= 300 - x_2^{A,*} = 150, \end{aligned} \tag{13}$$

las cuales son parte del set de PEA, dado que $x_1^i = x_2^i$ y $x_j^i \geq \sqrt{20000} \simeq 141.42$ se mantiene para ambos consumidores y ambos bienes.

3. **El gobierno central sospecha que el consumo del bien 1 tiene diferentes externalidades negativas para ambas ciudades. Es por eso que decide establecer un impuesto de t sobre las compras de este bien. Ante la presión de la ciudadania, el gobierno indica que solucionará el costo del impuesto a través de una devolución de dicho impuesto en forma de salario. Es decir, ambas ciudades recibirán una cuota global de $T^i = tx_1^i$ en forma de ingreso. El gobierno indica que esta política es eficiente ya que castiga el consumo nocivo, y, a la vez, permite que ambas ciudades tengan más ingresos. Encuentre la asignación de Equilibrio Walrasiano (WEA) después de impuestos (quedará**

en función de t), y compárela con su resultado en el item 2. Muestre su desarrollo matemático.

Comencemos con el problema de maximización de utilidad del consumidor A,

$$\begin{aligned} &\max_{x_1^A, x_2^A} x_1^A x_2^A \\ \text{sujeto a} \quad &(p_1 + t)x_1^A + p_2 x_2^A = p_1(200) + p_2(100) + T^A \end{aligned} \tag{14}$$

con condición de primer orden

$$\begin{aligned} x_2^A - \lambda^A(p_1 + t) = 0, \\ x_1^A - \lambda^A p_2 = 0, \\ (p_1 + t)x_1^A + p_2 x_2^A = p_1(200) + p_2(100) + T^A. \end{aligned} \tag{15}$$

Podemos reordenar y dividir la primera condición de primer orden por la segunda, para obtener

$$\frac{p_1 + t}{p_2} = \frac{x_2^A}{x_1^A}, \quad \text{o} \quad 1 + t = \frac{x_2^A}{x_1^A}, \tag{16}$$

Usando la tercera condición de primer orden del consumidor A (la restricción presupuestaria), tenemos

$$(1 + t)x_1^A + x_2^A = 200 + 100 + T^A, \tag{17}$$

y sustituyendo,

$$\begin{aligned} 2x_1^A = (1 - t)200 + 100 + tx_1^A = 300 - 200t + tx_1^A \\ \Rightarrow x_1^{A,*} = \frac{300 - 200t}{2 - t}. \end{aligned} \tag{18}$$

De nuestra solución en el item 1,

$$x_2^{A,*} = x_1^{A,*} = \frac{300 - 200t}{2 - t}, \tag{19}$$

Finalmente, usando las condiciones de factibilidad, podemos obtener las demandas Walrasianas para el consumidor B

$$\begin{aligned} x_1^{B,*} &= 300 - x_1^{A,*} = \frac{300-200t}{2-t}, \\ x_2^{B,*} &= 300 - x_2^{A,*} = \frac{300-200t}{2-t}. \end{aligned} \tag{20}$$

4. **Luego de la aplicación del impuesto, el gobierno central defiende la eficiencia del mismo indicando "Dado que devolvemos los impuestos a las personas en forma de ingresos, entonces seguimos teniendo una asignación eficiente del mercado". Demuestre si esto es verdad para cualquier valor de t. Muestre su desarrollo matemático y gráfique. Construya una respuesta técnica al argumento del gobierno central.**

   En el item 2 cuando no hay impuestos, la WEA se encuentra en la curva de contrato y en el core de Pareto, tal como descrito en el item 2. En particular, la WEA cuando no hay impuestos $(x_1^A, x_2^A; x_1^B, x_2^B) = (150, 150; 150, 150)$ satisface $x_1^i = x_2^i$ y $x_j^i \geq \sqrt{20000} \simeq 141.42$ para ambos consumidores y para ambos bienes.

   En el item 3 cuando hay impuestos, por definición, la WEA se encuentra en la curva de contrato. Sin embargo, para ciertos valores de t, el consumidor A preferiría consumir su asignación inicial en lugar de intercambiar sus bienes. Por ejemplo, cuando $t = 0$, obtenemos la misma asignación que en el item 2, pero si $t = 1$, obtenemos la asignación de equilibrio $(x_1^A, x_2^A; x_1^B, x_2^B) = (100, 100; 200, 200)$. Esto causaría que el individuo A reciba una utilidad de $100 * 100 = 10000$, la cual es mas baja que la utilidad que hubiera recibido al consumir su asignación inicial, que es 20000. La Figura 2 muestra el rango de WEAs donde solo aquellas que se encuentran encima de U^A son Pareto eficiente. Podemos resolver el valor de corte t que garantiza que la WEA con impuestos se encuentre en el core de asignaciones Pareto eficientes, es decir, que provee un nivel de utilidad ligeramente mayor que su asignación inicial,

$$\left(\frac{300-200t}{2-t}\right)\left(\frac{300-200t}{2-t}\right) \geq 20000. \tag{21}$$

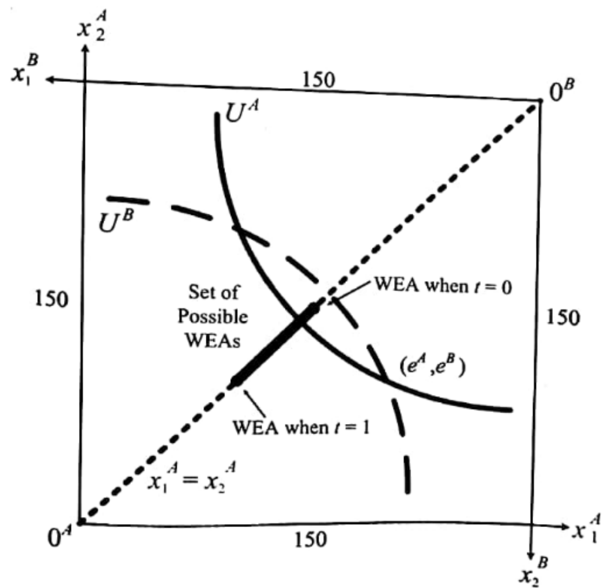

Figure 2: Set de PEAs con y sin impuestos

Resolviendo estra expresión para t nos da $t \leq 0.293$. Por lo tanto, solo cuando el impuesto es suficientemente bajo, habrá intercambio de bienes cuando hay impuestos.